ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ «САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ИТМО»

Дисциплина:

«Прикладная математика»

Отчет по лабораторной работе №2

Методы одномерной минимизации

Вариант 5 “Разделение моря”

Студенты:

Никитин Александр, M32041

Игнатьев Андрей, M32041

Курепин Даниил, M32041

Преподаватель:

Гомозова Валерия Эдуардовна

**Задачи:**

1. Решить задачу в соответствии с номером варианта. Для решения реализовать алгоритмы одномерной минимизации функции без производной: метод дихотомии, метод золотого сечения, метод Фибоначчи, метод парабол и комбинированный метод Брента.
2. Сравните методы по количеству итераций и количеству вычислений функции в зависимости от разной точности. Для каждого метода обязательно указывайте, как изменяется отрезок при переходе к следующей итерации.
3. ﻿﻿﻿Протестировать реализованные алгоритмы для задач минимизации многомодальных функций, например, на различных полиномах. Могут ли метод золотого сечения/Брента не найти локальный минимум многомодальной функции?
4. ﻿﻿﻿По результатам выполнения лабораторной работы необходимо подготовить отчет. Отчет должен содержать описание реализованных вами алгоритмов, ссылку на реализацию, необходимые тесты и таблицы.
5. ﻿﻿﻿Для защиты лабораторной работы необходимо знать описание методов на языке математики, пояснять полученные результаты, а также уметь обосновать разумность примененных Вами методов для данных функции.

Изображение выглядит как текст

Автоматически созданное описание

**Теория**

**Метод дихотомии**

Метод дихотомии или метод половинного деления – это итеративный метод, основанный на выборе некоторого шага , где длина конечного отрезка неопределённости. Берется середина отрезка и сравниваются значения функции в точках на расстоянии от середины отрезка. По результатам сравнения функции выбираются новые границы отрезка и операция повторяется до момента, пока отрезок неопределенности не станет меньше заданной точности .

**Ограничения на функцию для корректной работы алгоритма:**

1. *Непрерывность*
2. *Унимодальность на отрезке .*

**Скорость сходимости:**

Из-за того, что это небольшое значение, то на каждой итерации отрезок неопределенности уменьшается примерно на половину.

Следовательно,

Алгоритм имеет линейную скорость сходимости.

**Количество итераций для завершения алгоритма:**

**Метод золотого сечения**

Метод золотого сечения – это итеративный метод, основанный на сокращении отрезка неопределённости. Опираясь на свойства золотого сечения отрезка, этот метод использует найденные значения более рационально, чем метод дихотомии, что позволяет переходить к очередному отрезку, содержащему точку после вычисления одного, а не двух значений . Метод основан на делении текущего отрезка , где содержится искомый экстремум, на две неравные части, подчиняющиеся правилу золотого сечения, для определения следующего отрезка, содержащего максимум.

Точки находятся симметрично относительно середины отрезка и делят его в пропорции золотого сечения:

**Метод Фибоначчи**

Метод Фибоначчи — это улучшение реализации поиска с помощью золотого сечения, служащего для нахождения минимума/максимума функции. Подобно методу золотого сечения, он требует двух вычислений функции на первой итерации, а на каждой последующей только по одному. Однако этот метод отличается от метода золотого сечения тем, что коэффициент сокращения интервала неопределенности меняется от итерации к итерации.

**Последовательность чисел Фибоначчи**:

**Алгоритм метода Фибоначчи:**

Сначала выберем начальный отрезок , где будем искать минимум функции .

Находим количество итераций , необходимых для достижения заданной точности .

Для этого мы используем формулу .

Дальше нужно вычислить . После этого нам нужно сравнить функции в точках .

Если , то выбираем новый отрезок , а если , то .

Данные операции продолжаются до достижения заданной точности.

По факту, данный метод почти идентичен методу Золотого сечения, но он делит отрезок с помощью чисел Фибоначчи.

**Метод парабол**

Метод парабол – это метод, основанной на интерполяции функции с помощью параболы. Имеет сверхлинейную скорость сходимости.

**Алгоритм метода парабол:**

Мы аппроксимируем оптимизированную функцию с помощью квадратичной функции . Для того, чтобы найти коэффициенты аппроксимирующей параболы необходимо решить систему линейных уравнений:

*.*

При этом у нас есть ограничения: точка аппроксимации должна быть выбрана так, чтобы:

В таком случае точка гарантированно попадает в интервал так с помощью сравнения значений функции в которых мы сокращаем интервалы поиска.

**Комбинированный метод Брента**

Метод золотого сечения представляет собой надежный способ оптимизации, который сходится за гарантированное число итераций, но обладает лишь линейной скоростью сходимости.

Метод парабол работает быстрее в малой окрестности оптимального решения, но может работать долго и неустойчиво на начальных стадиях итерационного процесса. Поэтому на практике для решения задачи одномерной оптимизации используется метод Брента, который эффективно комбинирует эти две стратегии.

В данном методе на каждой итерации отслеживаются значения в шести точках (не обязательно различных): **.**

Точки , задают текущий интервал поиска решения, – точка, соответствующая наименьшему значению функции, – точка, соответветствующая второму снизу значению функции, – предыдущее значение. В отличие от метода парабол, в методе Брента аппроксимирующая парабола строится с помощью трех наилучших точек (в случае, если эти три точки различны и значения в них также различны).

При этом минимум аппроксимирующей параболы принимается в качестве следующей точки оптимизационного процесса, если:

1. попадает внутрь интервала и отстоит от границ интервала не менее, чем на ;
2. отстоит от точки не более, чем на половину от длины предпредыдущего шага.

Если точка отвергается, то следующая точка находится с помощью золотого сечения большего из интервалов и .

**Результаты**

**График**

Мы использовали нашу исходную функцию (по варианту) и получили такую зависимость количества итераций, выполненных каждым методом от заданной точности.

Изображение выглядит как диаграмма

Автоматически созданное описание

**Многомодальные функции**

Мы протестировали наши методы одномерной минимизации на трех различных полиномах четвертой степени:

В результате методы Дихотомии, Золотого сечения, Брента и Фибоначчи дали верные результаты, а метод парабол дал только один приблизительно верный результат – на втором полиноме.

Ниже представлены результаты соответственно полиномам:



Dichotomy search: min 5.056544232498577, iterations amount 35, calls count 70

Golden section search: min 5.056545396810725, iterations amount 48, calls count 50

Parabolas search: min 4.436562228704588e-10, iterations amount 95, calls count 98

Fibonacci search: min 5.0565488769326645, iterations amount 30, calls count 31

Brent search: min 5.056545285757963, iterations amount 52, calls count 53

Dichotomy search: min 2.618034539641121, iterations amount 35, calls count 70

Golden section search: min 2.618033995861629, iterations amount 48, calls count 50

Parabolas search: min 2.650468733378375e-10, iterations amount 102, calls count 105

Fibonacci search: min 2.618031760367016, iterations amount 30, calls count 31

Brent search: min 2.6180340005555967, iterations amount 67, calls count 68

Dichotomy search: min -3.934230555911025, iterations amount 36, calls count 72

Golden section search: min -3.9342289363669787, iterations amount 50, calls count 52

Parabolas search: min 4.5717807317657844e-10, iterations amount 55, calls count 58

Fibonacci search: min -3.9342360256392244, iterations amount 30, calls count 31

Brent search: min -3.9342288546073148, iterations amount 83, calls count 84

**Вывод**

По результатам тестирования таких методов одномерной оптимизации, как метод дихотомии, метод золотого сечения, метод Фибоначчи, метод парабол и комбинированный метод Брента, были сделаны выводы:

1. Методы Фибоначчи и Дихотомии показали себя лучшими по количеству итераций для достижения заданной точности (Дихотомии немного лучше).
2. Метод Брента и Золотого сечения показали себя хуже по количеству итераций, но лучше по количеству вычислений функции.
3. Метод парабол на нашей функции показал стабильно плохой результат.
4. Методы Дихотомии, Золотого сечения и Фибоначчи могут применяться не только на унимодальных функциях, но и на многомодальных функциях. Метод парабол оказался абсолютно неприменим для нахождения минимума многомодальной функции.